

ОЛИМПИАДА КФУ 21/22

Математика 10-11кл

Пример заданий олимпиады. Дистанционный/Очный этап. Решения

1. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 6:7, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 190.

Решение.

ABCD – параллелограмм.

BK – биссектриса, тогда $\angle ABK = \angle KBC$.

$AK/KD = 6/7$. Пусть k – коэффициент пропорциональности, тогда $AK = 6k$, $KD = 7k$, $AD = 13k$.

$BC \parallel AD$, BK – секущая, тогда $\angle AKB = \angle KBC$ (накрест лежащие), тогда BAK – равнобедренный и $AB = AK = 6k$.

Периметр $P = 190 = 2(AB + AD) = 2(6k + 13k) = 38k$, тогда $k = 5$, а $AD = 13k = 65$.

Критерии

Только ответ – 0 баллов

Пояснения, приводящие к ответу, но неполные – до 10 баллов

Обоснованный ответ – 20 баллов

2. Вычислить $\frac{\sin^2 35^\circ - \cos^2 145^\circ}{\cos 100^\circ \cdot \cos 350^\circ}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 35^\circ - \cos^2 145^\circ}{\cos 100^\circ \cdot \cos 350^\circ} &= -\frac{\cos^2(180^\circ - 35^\circ) - \sin^2 35^\circ}{\cos(90^\circ + 10^\circ) \cdot \cos(360^\circ - 10^\circ)} = -\frac{\cos^2 35^\circ - \sin^2 35^\circ}{-\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} \\ &= \frac{2\cos 70^\circ}{2\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ} = \frac{2\cos(90^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 2. \end{aligned}$$

Критерии

Только ответ – 0 баллов

Пояснения, приводящие к ответу, но неполные – до 10 баллов

Обоснованный ответ – 20 баллов

3. Саша и Маша одновременно из одного дома вышли в одну школу по одному маршруту с разными скоростями. Пройдя треть пути, Маша встретила подругу из другой школы и остановилась с ней поговорить. Она пошла дальше, только когда Саша был в трети пути до школы. Саша дошёл до школы, вспомнил, что забыл тетрадь по математике и пошёл домой с той же скоростью. Кто дойдёт раньше – Маша в школу или Саша – домой?

Решение

Достаточно заметить, что Маша прошла треть пути до школы ($1/3 S$) быстрее, чем Саша – $2/3$ пути до школы ($2/3 S$). Потому что она стояла и разговаривала какое-то время.

Маше до школы осталось пройти $2/3 S$, а Саше до дома – $4/3 S$. Значит Маша окажется в школе раньше, чем Саша дома.

Критерии

Только ответ – 0 баллов

Пояснения, приводящие к ответу, но неполные – до 10 баллов

Обоснованный любым способом ответ (логически, графически или аналитически) – 20 баллов

4. Можно ли число 2021 представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы произведение всех этих чисел тоже было равно 2021.

Решение

Заметим, что

$$2021 = 43 \cdot 47 \cdot 1$$

Тогда

$$2021 = 43 \cdot 47 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{1931}$$

При этом

$$2021 = 43 + 47 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{1931}$$

Ответ: да

Критерии

Только ответ – 0 баллов

Описан общий подход, без уточнения числа единиц – до 10 баллов.

Обоснованный ответ – 20 баллов

5. Вычислите:

$$\frac{(20222022 - 20212021)(20222022^4 - 20212021^4)}{20222022^2 - 20212021^2} - \frac{2 \cdot 20222022 \cdot 20212021(20222022^3 - 20212021^3)}{20222022^2 + 20222022 \cdot 20212021 + 20212021^2}$$

Решение

Сделаем замену

$$a = 20222022, \quad b = 20212021$$

Тогда формула примет вид

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)(a^4-b^4)}{a^2-b^2} - \frac{2ab(a^3-b^3)}{a^2+ab+b^2} &= a^3 - a^2b + ab^2 - b^3 - 2a^2b + 2ab^2 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3 = 10001^3 = 1000300030001 \end{aligned}$$

Критерий

Любая, не доведённая до конца, попытка прямого вычисления без замены, или ответ без решения – 0 баллов

Вычисление с заменой, при наличии арифметической ошибки – 10 баллов

Ответ без итогового вычисления – до 17 баллов

Полное обоснованное решение – 20 баллов

6. Существует ли возрастающая геометрическая прогрессия, у которой первые 100 членов – целые числа, а все остальные не являются целыми.

Решение

Да. Пусть, например

$$b_1 = 2^{99}, \quad q = \frac{2}{3}$$

Тогда

$$b_2 = 3 \cdot 2^{98}, \quad b_3 = 3^2 \cdot 2^{97}, \dots,$$

$$b_{100} = 3^{99}, \quad b_{101} = \frac{3^{100}}{2}, \dots$$

Критерий

Только ответ – 0 баллов

Только верно указаны первый элемент и знаменатель прогрессии без проверки – 10 баллов.

Любой верно построенный пример геометрической прогрессии – от 15 до 20 баллов, в зависимости от чёткости обоснования.